

# MATEMATICĂ

clasa a XII-a

**BREVIAR TEORETIC. EXERCIIII ȘI PROBLEME  
PROPUSE ȘI REZOLVATE. TESTE DE EVALUARE**

■ **filierea tehnologică**  
**toate calificările profesionale**

**Consultant:**

***Prof.univ.dr.mat.em. OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ***



**NICULESCU**

### Algebră

<b>Capitolul I. Grupuri</b> .....	6
1. Legi de compoziție. Parte stabilă.....	6
2. Proprietăți ale legilor de compoziție. Semigrupuri. Monoizi.....	13
<i>Teste de evaluare</i> .....	23
3. Grupuri.....	25
4. Morfisme și izomorfisme de grupuri.....	34
<i>Teste de evaluare</i> .....	42
<b>Capitolul II. Inele și corpuri</b> .....	44
1. Inele.....	44
2. Corpuri.....	53
<i>Teste de evaluare</i> .....	57
<b>Capitolul III. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ</b> ( $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, p$ prim).....	59
1. Forma algebrică a unui polinom. Forma polinomială. Operații.....	59
2. Teorema împărțirii cu rest. Împărțirea cu $X - a$ . Schema lui Horner ...	65
3. Divizibilitatea polinoamelor. Teorema lui Bézout. C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al unor polinoame.....	72
<i>Teste de evaluare</i> .....	78
4. Descompunerea unui polinom în factori ireductibili.....	80
5. Rădăcini ale polinoamelor. Relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult patru.....	83
<i>Teste de evaluare</i> .....	90
6. Rezolvarea ecuațiilor cu coeficienți reali, raționali, întregi. Ecuații binome, bipătrate, ecuații reciproce.....	92
<i>Teste de evaluare</i> .....	98

<b>Capitolul I. Primitive (antiderivate)</b> .....	100
1. Primitivele unei funcții .....	100
<i>Teste de evaluare</i> .....	104
2. Integrala nedefinită a unei funcții. Proprietăți .....	106
3. Integrarea prin părți .....	111
4. Metoda schimbării de variabilă.....	123
<i>Teste de evaluare</i> .....	131
<b>Capitolul II. Integrale definite</b> .....	133
1. Integrala definită a unei funcții continue .....	133
2. Proprietăți ale integralei definite .....	136
<i>Teste de evaluare</i> .....	140
3. Metode de calcul ale integralelor definite.....	141
3.1. Integrarea prin părți.....	141
3.2. Integrarea prin schimbare de variabilă .....	145
3.3. Integrarea funcțiilor raționale.....	149
<i>Teste de evaluare</i> .....	155
<b>Capitolul III. Aplicații ale integralei definite</b> .....	157
1. Aria unei suprafețe plane .....	157
2. Volumul corpurilor de rotație .....	164
<i>Teste de evaluare</i> .....	169
<i>Subiecte date sau propuse pentru examenul de</i> <i>    bacalaureat național în 2015</i> .....	171
<i>Subiecte date sau propuse pentru examenul de</i> <i>    bacalaureat național în 2016</i> .....	177
<b>Răspunsuri</b>	
<i>Algebră</i> .....	184
<i>Analiză matematică</i> .....	227
<i>Subiecte date sau propuse pentru examenul de</i> <i>    bacalaureat național în 2015</i> .....	267
<i>Subiecte date sau propuse pentru examenul de</i> <i>    bacalaureat național în 2016</i> .....	279

## 1. Legi de compoziție. Parte stabilă

### IMPORTANT!

**Definiție.** Dacă  $M$  este o mulțime nevidă, atunci o funcție  $\varphi: M \times M \rightarrow M$  se numește *lege de compoziție* (sau operație algebrică internă sau operație liniară) pe mulțimea  $M$ ,  $(x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$ .

Pentru simplificare, operația algebrică se notează cu  $*$ ,  $\circ$ ,  $\perp$ ,  $+$ ,  $\Delta$  etc.

*Exemplu:*  $*$ :  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $x * y = \frac{x+y}{1-xy}$ .

Dacă mulțimea  $M$  este finită, atunci legea de compoziție poate fi exprimată printr-un tabel cu  $n$  linii și  $n$  coloane, unde  $n = \text{card } M$ .

*Exemplu:*  $M = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$ , unde  $\varepsilon$  este rădăcina cubică a unității, iar legea de compoziție este înmulțirea „ $\cdot$ ”.

$\cdot$	1	$\varepsilon$	$\varepsilon^2$
1	1	$\varepsilon$	$\varepsilon^2$
$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon^2$	1
$\varepsilon^2$	$\varepsilon^2$	1	$\varepsilon$

*Observație.* Acest tabel se numește *tabla Cayley* sau *tabla operației*.

### 1. Adunarea și înmulțirea modulo $n$

Dacă  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $a \in \mathbb{Z}$ , atunci numărul  $r$  din teorema împărțirii cu rest  $a = n \cdot c + r$ ,  $0 \leq r < n$ , se numește *restul modulo  $n$*  al numărului  $a$  și se notează cu  $r = a \bmod n$ . Notăm cu  $R_n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ , mulțimea resturilor modulo  $n$  și introducem legile de compoziție:  $\oplus: \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$ ,  $x \oplus y = (x+y) \bmod n$  și  $\odot: \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$ ,  $x \odot y = (x \cdot y) \bmod n$ , numite adunarea modulo  $n$ , respectiv înmulțirea modulo  $n$ .

*Exemplu:*  $R_3 = \{0, 1, 2\}$ , este mulțimea resturilor modulo 3. Tabelele operațiilor de adunare modulo 3 și de înmulțire modulo 3 sunt următoarele:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\odot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

## 2. Adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo $n$ .

Respect pentru oameni și cărți

Dacă  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a \in \mathbb{Z}$  și  $r = a \bmod n$ , notăm cu  $\hat{a} = \{nk + r \mid k \in \mathbb{Z}\}$  și o numim clasă de resturi modulo  $n$ . Se poate arăta că  $\hat{a} = \hat{r}$ . Atunci mulțimea  $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$  se numește mulțimea claselor de resturi modulo  $n$ .

Se definesc legile de compoziție

$$+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \hat{x} + \hat{y} = \widehat{x + y} \text{ și } \cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \hat{x} \cdot \hat{y} = \widehat{x \cdot y}$$

adunarea, respectiv înmulțirea claselor de resturi modulo  $n$ . Se poate demonstra că operațiile definite anterior sunt independente de reprezentanții aleși  $x$  și  $y$  ai claselor.

*Exemplu:* Tabla adunării și înmulțirii în mulțimea claselor de resturi modulo 4.

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

**Definiție.** Fie  $M$  o mulțime pe care este dată o lege de compoziție  $\varphi$ :

$$\varphi : M \times M \rightarrow M; (x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$$

O submulțime  $H$  a lui  $M$  cu proprietatea  $(\forall) x, y \in H \Rightarrow \varphi(x, y) \in H$  se numește parte stabilă a lui  $M$  în raport cu legea de compoziție.

*Observație:* Notăm cu  $2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  mulțimea numerelor întregi pare și  $2\mathbb{Z} + 1 = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$  mulțimea numerelor întregi impare. Avem  $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ .

### Modele pentru rezolvarea problemelor și redactarea soluțiilor

1. Arătați că mulțimea  $2\mathbb{Z}$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{Z}$  în raport cu operațiile de adunare și înmulțire.

*Soluție:*

Fie  $x, y \in 2\mathbb{Z}$ ,  $x = 2k_1$ ,  $y = 2k_2$ ,  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ; atunci  $x + y = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2) \in 2\mathbb{Z}$ .

$$x \cdot y = 2k_1 \cdot 2k_2 = 4k_1 \cdot k_2 \in 2\mathbb{Z}.$$

2. Arătați că  $2\mathbb{Z} + 1$  nu este parte stabilă a lui  $\mathbb{Z}$  în raport cu adunarea numerelor întregi.

*Soluție:*

Fie  $x, y \in 2\mathbb{Z} + 1$ ,  $x = 2k_1 + 1$ ,  $y = 2k_2 + 1$ ,  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Avem } x + y = 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2 + 1) \notin 2\mathbb{Z} + 1.$$

3. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  definim legea  $*$  astfel:  $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ . Arătați că:

a)  $H_1 = (2, \infty)$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu  $*$ .

b)  $H_2 = [1, 3]$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu  $*$ .

**Soluție:**

a) Fie  $x, y \in H_1$  și arătăm că  $x * y \in H_1$ ;  $x > 2, y > 2$  sau  $x - 2 > 0, y - 2 > 0 \Rightarrow (x - 2)(y - 2) > 0 \Rightarrow (x - 2)(y - 2) + 2 > 2 \Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 + 2 > 2 \Rightarrow x * y > 2$  deci  $x * y \in H_1$ .

b) Fie  $x, y \in H_2$  și arătăm că  $x * y \in H_2$ ;  $1 < x < 3; 1 < y < 3 \Leftrightarrow |x - 2| < 1; |y - 2| < 1$  și arătăm că  $|x * y - 2| < 1$ .

$$|x - 2| < 1$$

$$|y - 2| < 1$$

$$|xy - 2x - 2y + 4| < 1 \Leftrightarrow |xy - 2x - 2y + 6 - 2| < 1 \Leftrightarrow |x * y - 2| < 1 \Rightarrow x * y \in H_2.$$

4. Pe  $\mathbb{R}$  definim legea  $x * y = xy + x + y$ .

Demonstrați că  $H = (-1, \infty) \subset \mathbb{R}$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea  $*$ .

**Soluție:**

Vom arăta că dacă  $x, y \in H$ , atunci  $x * y \in H$ . Putem scrie

$$xy + x + y = xy + x + y + 1 - 1 = (x + 1)(y + 1) - 1.$$

Din  $x, y \in (-1, \infty) \Rightarrow x > -1, y > -1 \Rightarrow x + 1 > 0, y + 1 > 0 \Rightarrow (x + 1)(y + 1) > 0 \Rightarrow (x + 1)(y + 1) - 1 > -1 \Rightarrow x * y > -1$ , de unde  $x * y \in (-1, \infty) = H$ .

5. Fie  $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) / A = \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix}; 4x^2 - 3y^2 = 1, x, y \in \mathbb{Q}\}$ . Să se

demonstreze că  $H$  este parte stabilă a lui  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$  în raport cu înmulțirea matricelor.

**Soluție:**

Fie  $A_1, A_2 \in H$  și vom demonstra că  $A_1 \cdot A_2 \in H$ .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 & 3y_1 \\ y_1 & 2x_1 \end{pmatrix}; 4x_1^2 - 3y_1^2 = 1, x_1, y_1 \in \mathbb{Q} \text{ și}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2x_2 & 3y_2 \\ y_2 & 2x_2 \end{pmatrix}; 4x_2^2 - 3y_2^2 = 1, x_2, y_2 \in \mathbb{Q}.$$

$$\begin{aligned} A_1 \cdot A_2 &= \begin{pmatrix} 4x_1x_2 + 3y_1y_2 & 6x_1y_2 + 6x_2y_1 \\ 2x_2y_1 + 2x_1y_2 & 3y_1y_2 + 4x_1x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2(2x_1x_2 + \frac{3}{2}y_1y_2) & 3(2x_1y_2 + 2x_2y_1) \\ 2x_1y_2 + 2x_2y_1 & 2(2x_1x_2 + \frac{3}{2}y_1y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ b & 2a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Se mai verifică și condiția  $4a^2 - 3b^2 = 1$ .

$$\begin{aligned} 4a^2 - 3b^2 &= 4(2x_1x_2 + \frac{3}{2}y_1y_2)^2 - 3(2x_1y_2 + 2x_2y_1)^2 = \\ &= 4x_1^2(4x_2^2 - 3y_2^2) - 3y_1^2(4x_2^2 - 3y_2^2) = (4x_2^2 - 3y_2^2)(4x_1^2 - 3y_1^2) = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Deci  $H$  este parte stabilă a lui  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$  în raport cu înmulțirea matricelor.

Respect pentru oameni și cărți.

6. Fie  $G = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$  și funcțiile  $f_k : G \rightarrow G, k \in \{1, 2, 3\}$  definite astfel:

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}}, f_3(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{1 + x\sqrt{3}}. \text{ Arătați că } H = \{f_1, f_2, f_3\} \text{ este parte}$$

stabilă a mulțimii  $F(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{R}\}$  în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

*Soluție:*

Fiind o mulțime finită vom realiza tabla Cayley și vom vedea că oricare ar fi  $f_i, f_j \in H, i, j \in \{1, 2, 3\}, f_i \circ f_j \in H$ .

Deoarece  $f_1$  este funcție identică rezultă

$$(f_1 \circ f_i)(x) = f_1(f_i(x)) = f_i(x) \text{ și că } (f_i \circ f_1)(x) = f_i(f_1(x)) = f_i(x), (\forall) i \in \{1, 2, 3\}.$$

$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = \frac{f_2(x) + \sqrt{3}}{1 - f_2(x)\sqrt{3}} = \frac{x + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 3x}{1 - x\sqrt{3} - \sqrt{3}x - 3} = \frac{x - \sqrt{3}}{1 + x\sqrt{3}} = f_3(x).$$

$$(f_2 \circ f_3)(x) = f_2(f_3(x)) = \frac{f_3(x) + \sqrt{3}}{1 - f_3(x)\sqrt{3}} = \frac{x - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 3x}{1 + x\sqrt{3} - x\sqrt{3} + 3} = \frac{4x}{4} = x = f_1(x).$$

$$(f_3 \circ f_2)(x) = f_3(f_2(x)) = \frac{f_2(x) - \sqrt{3}}{1 + f_2(x)\sqrt{3}} = \frac{x + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 3x}{1 - x\sqrt{3} + \sqrt{3}x + 3} = \frac{4x}{4} = x = f_1(x).$$

Tabela compunerii este:

$\circ$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$f_1$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$f_2$	$f_2$	$f_3$	$f_1$
$f_3$	$f_3$	$f_1$	$f_2$

### Exerciții și probleme pentru fixarea cunoștințelor

1. Fie  $H = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \subset \mathbb{Z}$ . Pe  $H$  se introduce operația  $x * y = \min(x, y)$  (minimul dintre  $x$  și  $y$ ). Arătați că  $H$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{Z}$  în raport cu  $*$ .

2. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  definim  $x * y = (x - 1)(y - 1) + 1$ . Arătați că:

a)  $H_1 = [1, \infty)$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu  $*$ .

b)  $H_2 = [1, 2]$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu  $*$ .

3. Pe  $\mathbb{R}$  definim operația  $x * y = -xy - 5x - 5y - 30$ . Arătați că  $H = (-\infty, -5)$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu operația  $*$ .

4. Completați tabla operației adunării modulo 5 și tabla înmulțirii modulo 5.

5. Completați tabla operației adunării și tabla înmulțirii modulo 7.

Respect pentru oameni și cărți

6. Fie  $M = [3, \infty)$  și operația  $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ . Să se demonstreze că „\*” este o lege de compoziție internă.

7. Fie mulțimea  $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{N}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$ .

a) Să se stabilească dacă  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  aparțin lui  $H$ .

b) Să se studieze dacă  $H$  este parte stabilă față de înmulțirea matricelor.

8. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = 3x + 4y - 7$ ,  $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$ .

a) Calculați  $(2 \circ 3) \circ 1$ .

b) Rezolvați ecuațiile  $x \circ 2 = 7$  și  $(2x + 1) \circ x = 18$ .

c) Rezolvați ecuația  $(x^2 + 1) \circ (x - 1) = -1$ .

d) Rezolvați sistemul  $\begin{cases} x \circ y = 7 \\ (2x) \circ (3y) = 29 \end{cases}$ .

9. Fie  $F = \{f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_a(x) = 2^a x + 1 - 2^a, a \in \mathbb{R}\}$ . Să se arate că  $F$  este parte stabilă în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

10. Fie mulțimea  $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 4x \\ -x & 1-2x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$ . Arătați că mulțimea  $G$

este parte stabilă a lui  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

### Exerciții și probleme pentru aprofundarea cunoștințelor

1. Arătați că mulțimea  $H = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 3y \\ \frac{7y}{3} & x \end{pmatrix} / x, y \in \mathbb{Q} \text{ și } x^2 - 7y^2 = 1 \right\}$  este parte

stabilă a lui  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$  în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \top y = xy + \frac{x+y}{n} - \frac{n-1}{n^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ . Arătați că:

a)  $x \top y = \left(x + \frac{1}{n}\right) \left(y + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$ ;



Respect pentru oameni și cărți.

b)  $x \top \left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ ;

c)  $H = \left[-\frac{1}{n}, +\infty\right)$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu operația „ $\top$ ”.

3. Pe mulțimea numerelor raționale  $\mathbb{Q}$  se definește legea de compoziție

$x \Delta y = x + y - \frac{xy}{2}$ . Arătați că  $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{Q}$  în raport cu operația „ $\Delta$ ”.

4. Pe mulțimea numerelor întregi  $\mathbb{Z}$  se definesc operațiile:  $x \circ y = x + y - a$  și  $x * y = xy - a(x + y) + a(a + 1)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ . Rezolvați:

a) ecuația  $x \circ x = x * x$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ ;

b) sistemul 
$$\begin{cases} x \circ (y + 2) = a \\ (x - y) * 1 = a \end{cases}$$

5. Arătați că  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & 2x(x+1) \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$  este parte stabilă a lui  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  în

raport cu operația de înmulțire a matricelor.

6. Pe mulțimea  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  se definesc operațiile:  $x \circ y = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ . Arătați că  $[2, +\infty)$

este parte stabilă a lui  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  în raport cu  $\circ$ .

7. Fie  $G = (2, +\infty)$  și legea de compoziție  $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$ ,  $\forall x, y \in G$ .

a) Calculați  $x \circ x \circ x \circ x$ .

b) Rezolvați ecuația  $x \circ x \circ x \circ x = 18$ .

8. Determinați pentru ce valori este parametrului  $m \in \mathbb{R}$ , intervalul  $(2, +\infty)$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea de compoziție:  $x * y = xy - 2x - 2y + m$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

9. Fie  $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ .

a) Arătați că  $M$  este parte stabilă a lui  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

b) Determinați  $a \in \mathbb{R}$  pentru care  $A(a) \cdot A(x) = A(x)$ .

c) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $A(x) \cdot A(1) = A(x + 2025)$ .

d) Calculați  $(A(x))^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

10. Pe  $\mathbb{Z}$  se definesc operațiile algebrice

$$x * y = x + y - 3 \text{ și } x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3, (\forall) x, y \in \mathbb{Z}.$$

a) Rezolvați în  $\mathbb{Z}$  ecuația  $x \circ x = x * x$ .

b) Să se determine  $a \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $x \circ a = 3, (\forall) x \in \mathbb{Z}$ .

c) Să se rezolve sistemul 
$$\begin{cases} x * (y + 1) = 4 \\ (x - y) \circ 1 = 5 \end{cases}$$

(Bacalaureat 2009)

11. Fie  $M = \mathbb{R}^* \setminus \{\pm 1\}$  și funcțiile  $f_i : M \rightarrow M, i = 1, 2, 3, 4$ , unde

$$f_1(x) = x; f_2(x) = \frac{x-1}{x+1}; f_3(x) = \frac{1}{x}; f_4(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Considerăm mulțimea  $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  și operația de compunere a funcțiilor. Să se demonstreze că  $G$  este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor.

12. Fie  $M = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$  și operația  $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$ . Să se demonstreze că  $M$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu operația  $*$ .

13. Pe mulțimea  $M = (2, \infty)$  se consideră operația

$$x \circ y = \frac{xy - 2}{x + y - 3}, (\forall) x, y \in M.$$

a) Să se arate că  $M$  este parte stabilă în raport cu „ $\circ$ ”.

b) Verificați egalitatea  $(3 \circ 4) \circ 5 = 3 \circ (4 \circ 5)$ .

14. Fie mulțimea  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ . Să se arate că  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  este parte stabilă în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor reale.

15. Fie  $M = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 2y^2 = 1\}$ . Să se arate că  $M$  este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale.